第 2 节 基本不等式的核心运用思想（★★★☆）

内容提要

用基本不等式求最值的关键是凑定值，有的题目定值较难凑出，本节将梳理一些凑定值的核心思想.

1．消元思想：若给出的等式容易反解出某个变量，则可考虑将其反解出来，代入求最值的目标式，消元后再进行分析.

2．齐次化思想：对于分式型最值问题，若分子分母不齐次，可考虑结合已知条件将分子分母齐次化，齐次化后，通过变形往往可凑出 $a\cdot\dfrac{x}{y}+b\cdot\dfrac{y}{x}$ 这种积为定值的形式.

3．统一结构思想：若所给的等式中已有求最值的部分，则考虑把其余部分也变成求最值的目标，统一结构，解出其范围.

4．多次使用基本不等式：若多元代数式的变量间没有等量关系，则可尝试先用一次基本不等式消去一个变量，再对得到的式子用基本不等式，求出最值.

典型例题

类型Ⅰ：消元思想

【例 1】已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a+b}$ 的最小值是_____.

解法 1：a，b 的关系式较简单，可反解出一个，代入目标式消元再看，

由 $ab=1$ 可得 $b=\dfrac{1}{a}$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a+b}=\dfrac{1}{a}+a+\dfrac{4}{a+\frac{1}{a}}\ge 2\sqrt{(a+\frac{1}{a})\cdot\dfrac{4}{a+\frac{1}{a}}}=4$，

当且仅当 $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{a+\frac{1}{a}}$ 时取等号，结合 $a>0$ 可解得：$a=1$，此时 $b=1$，满足题意，故 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a+b})_{\min}=4$.

解法 2：求和的最小值应凑积定，注意到分母为 $a+b$，所以分子也应有 $a+b$，故将前两项通分，

由题意，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a+b}=\dfrac{b+a}{ab}+\dfrac{4}{a+b}=a+b+\dfrac{4}{a+b}\ge 2\sqrt{(a+b)\cdot\dfrac{4}{a+b}}=4$，

当且仅当 $a+b=\dfrac{4}{a+b}$ 时取等号，结合 $ab=1$ 及 a，b 均为正数可得 $a=b=1$，所以 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a+b})_{\min}=4$.

答案：4

【变式】（多选）已知 a，b，c 均为正实数，且 $ab+ac=2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{8}{a+b+c}$ 的值不可能是（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

解析：应先求出目标式的范围，该式变量多，观察发现所给等式可提 a 反解出 $b+c$，代入目标消元，

由 $ab+ac=2$ 可得 $b+c=\dfrac{2}{a}$，代入 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{8}{a+b+c}$ 可得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{8}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{8}{a+\frac{2}{a}}$，

上式看似复杂，但若提个$\frac{1}{2}$，就出现积为定值了，$\frac{1}{a}+\frac{a}{2}+\frac{8}{a+\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}(\frac{2}{a}+a+\frac{16}{a+\frac{2}{a}})\geq\sqrt{(\frac{2}{a}+a)\cdot\frac{16}{a+\frac{2}{a}}}=4$，

取等条件是$\frac{2}{a}+a=\frac{16}{a+\frac{2}{a}}$，结合$a>0$可解得：$a=2\pm\sqrt{2}$，所以$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}+\frac{8}{a+b+c})_{\min}=4$，故选 ABC.

答案： ABC

【反思】 涉及多个变量，也可以尝试消元，若把本题的$b+c$整体换成b，就和例 1 差不多了.

【例 2】已知$a>0$，$b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，则$\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-2}$的最小值为_____.

解析： 条件看似为“1”的代换，但尝试后发现不是，既然“积定”不易凑出，可反解出b，消元再看，

由$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$可得$b=\frac{2a}{a-1}$，因为$a>0$，$b>0$，所以$a>1$，

$$\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-2}=\frac{a}{a-1}+\frac{\frac{2a}{a-1}}{\frac{2a}{a-1}-2}=\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{2a-2(a-1)}=\frac{a}{a-1}+a=\frac{(a-1)+1}{a-1}+a=1+\frac{1}{a-1}+a$$

$$=2+\frac{1}{a-1}+(a-1)\geq 2+2\sqrt{\frac{1}{a-1}\cdot(a-1)}=4,$$

当且仅当$\frac{1}{a-1}=a-1$时取等号，结合$a>1$可得此时$a=2$，所以$\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-2}$的最小值为 4.

答案： 4

【变式】已知$x>0$，$y>0$，且$x^2-xy=2$，则$x+\frac{6}{x}+\frac{1}{x-y}$的最小值为（　　）

（A）6　（B）$6\sqrt{2}$　（C）3　（D）$3\sqrt{2}$

解析： 由所给等式容易反解出 y，代入目标式可消元，但这样得到的式子较复杂，还需化简，经过观察，消$x-y$可一步到位，

由$x^2-xy=2$可得$x-y=\frac{2}{x}$，所以$x+\frac{6}{x}+\frac{1}{x-y}=x+\frac{6}{x}+\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}+\frac{6}{x}\geq 2\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{6}{x}}=6$，

取等条件是$\frac{3x}{2}=\frac{6}{x}$，结合$x>0$可得$x=2$，代入$x-y=\frac{2}{x}$可得$y=1$，满足条件，故$(x+\frac{6}{x}+\frac{1}{x-y})_{\min}=6$.

答案： A

【反思】 不一定每次都得反解出x或y再代入消元，有时结合已知条件和目标式的结构特征，整体代换某一部分也能达到消元的目的.

【总结】 当由已知等式容易反解出某个变量时，可尝试消元，看之后的式子是否便于处理. 但需注意，消元法不是万能的，有些问题消元后反而形式会更复杂，所以得考虑其他方法，例如下面的例 3.

类型Ⅱ：齐次化思想

【例 3】已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，则 $\dfrac{(x+1)(y+1)}{xy}$ 的最小值为_____.

解析：本题若由 $x+2y=1$ 反解出 x，并代入消元，可得到 $\dfrac{(x+1)(y+1)}{xy}=\dfrac{(2-2y)(y+1)}{(1-2y)y}$，能求最值，但稍麻烦，而我们发现目标式分子分母次数不统一，故可考虑将 1 换成 $x+2y$，使分子分母齐次化，

由题意，$\dfrac{(x+1)(y+1)}{xy}=\dfrac{(x+x+2y)(y+x+2y)}{xy}=\dfrac{2x^2+8xy+6y^2}{xy}=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{6y}{x}+8\ge 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{6y}{x}}+8=4\sqrt{3}+8$，

取等条件是 $\dfrac{2x}{y}=\dfrac{6y}{x}$，结合 $x+2y=1$ 可得 $x=2\sqrt{3}-3$，$y=2-\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{(x+1)(y+1)}{xy}$ 的最小值为 $4\sqrt{3}+8$.

答案：$4\sqrt{3}+8$

【变式】已知 x，y 为正实数，且 $x+y=2$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}$ 的最小值为_____.

解析：本题能用消元法，但若注意到分子分母不齐次，故用常数代换将它们分别齐次化会更简单，

因为 $x+y=2$，所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{2}{2x}+\dfrac{4}{4xy}=\dfrac{x+y}{2x}+\dfrac{(x+y)^2}{4xy}=\dfrac{x+y}{2x}+\dfrac{x^2+y^2+2xy}{4xy}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x}{4y}+\dfrac{y}{4x}+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{3y}{4x}+\dfrac{x}{4y}\ge 1+2\sqrt{\dfrac{3y}{4x}\cdot\dfrac{x}{4y}}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $\dfrac{3y}{4x}=\dfrac{x}{4y}$ 时等号成立，结合 $x+y=2$ 可得此时 $x=3-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}-1$，故 $(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy})_{\min}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【总结】涉及分式的最小值，若分子分母不齐次，可考虑将其齐次化，看能否化简为 $a\cdot\dfrac{y}{x}+b\cdot\dfrac{x}{y}$ 这种形式，凑出积为定值，进而利用基本不等式求最值. 上一节的“1”的代换，本质上其实也是齐次化.

类型Ⅲ：统一结构思想

【例 4】若 x，y 满足 $x^2+y^2=1+xy$，则 x^2+y^2 的最大值是_____.

解析：所给等式中已有求最值的目标 x^2+y^2，故想办法将 xy 也变成 x^2+y^2，达到统一结构的目的，

由题意，$x^2+y^2=1+xy\le 1+\dfrac{x^2+y^2}{2}$，整理得：$x^2+y^2\le 2$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，

结合 $x^2+y^2=1+xy$ 可得此时 $x=y=\pm 1$，所以 x^2+y^2 的最大值是 2.

答案：2

【反思】①不等式 $x^2+y^2\ge 2xy$ 可沟通两项的平方和 x^2+y^2 与它们的乘积 xy；②若所给等式中已有求最值的结构，则可尝试用不等式将其余部分也变成该结构，从而求出最值.

【变式 1】已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=\sqrt{2ab+4}$，则 $a+2b$ 的最大值是（　　）

（A）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（C）3　（D）4

解析： 要求 $a+2b$ 的最大值，条件中有 $a+2b$，故若将剩下的 $2ab$ 也变成 $a+2b$，就统一了结构，

因为 $2ab=a\cdot 2b\le(\frac{a+2b}{2})^2$，所以 $a+2b=\sqrt{2ab+4}\le\sqrt{(\frac{a+2b}{2})^2+4}$，化简得：$a+2b\le\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

取等条件是 $a=2b$，结合 $a+2b=\sqrt{2ab+4}$ 可得此时 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $(a+2b)_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

答案： A

【变式 2】已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=5$，则 $a+b$ 的最小值为_____；最大值为_____.

解析： 所给等式中已有求最值的目标 $a+b$，故想办法将 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 也化为 $a+b$，从而统一结构，

因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ 且 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{a+b}{(\frac{a+b}{2})^2}=\frac{4}{a+b}$，故 $5=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge a+b+\frac{4}{a+b}$ ①，

将 $a+b$ 看作整体，由上述不等式可求出其范围，为了便于观察，换个元，

令 $t=a+b$，则不等式①即为 $5\ge t+\frac{4}{t}$，所以 $5t\ge t^2+4$，故 $(t-1)(t-4)\le 0$，解得：$1\le t\le 4$，

所以 $1\le a+b\le 4$，取等条件是 $a=b$，代入 $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=5$ 可求得 $a=b=\frac{1}{2}$ 或 $a=b=2$，

分别对应 $1\le a+b\le 4$ 的左、右两侧取等的情形，所以 $(a+b)_{\min}=1$，$(a+b)_{\max}=4$.

答案： 1；4

【反思】不管所给等式怎样变化，核心都是寻求结构的统一，只要将所给等式化成关于求最值目标的不等式，就能解决问题.

【例 5】设 $a>0$，$b>0$，若 $a+3b=5$，则 $\frac{(a+1)(3b+1)}{\sqrt{ab}}$ 的最小值为_____.

解析： 本题消元或齐次化都不好处理，仔细观察会发现，若将分子括号打开，会出现 $a+3b$，和已知联系起来，

由题意，$\frac{(a+1)(3b+1)}{\sqrt{ab}}=\frac{3ab+a+3b+1}{\sqrt{ab}}=\frac{3ab+6}{\sqrt{ab}}=3\sqrt{ab}+\frac{6}{\sqrt{ab}}\ge 2\sqrt{3\sqrt{ab}\cdot\frac{6}{\sqrt{ab}}}=6\sqrt{2}$，

取等条件是 $3\sqrt{ab}=\frac{6}{\sqrt{ab}}$，结合 $a+3b=5$ 可得此时 $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$，所以 $\frac{(a+1)(3b+1)}{\sqrt{ab}}$ 的最小值为 $6\sqrt{2}$.

答案： $6\sqrt{2}$

【变式】已知 $a>b$，且 $ab=18$，则 $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}-1$的最小值为_____.

解析：观察已知和目标式发现有 ab，$a-b$，a^2+b^2，应寻求三者之间的联系，可配方，

由题意，$\dfrac{a^2+b^2}{a-b}-1=\dfrac{(a-b)^2+2ab}{a-b}-1=\dfrac{(a-b)^2+36}{a-b}-1=(a-b)+\dfrac{36}{a-b}-1\ge 2\sqrt{(a-b)\cdot\dfrac{36}{a-b}}-1=11$，

取等条件是 $a-b=\dfrac{36}{a-b}$，结合 $a>b$ 和 $ab=18$ 可得 $\begin{cases}a=3+3\sqrt{3}\\ b=3\sqrt{3}-3\end{cases}$或$\begin{cases}a=3-3\sqrt{3}\\ b=-3-3\sqrt{3}\end{cases}$，所以 $(\dfrac{a^2+b^2}{a-b}-1)_{\min}=11$.

答案：11

【反思】例五与变式都是寻求条件与结论（要求的式子）形式上的联系，这种联系因题而异，我们要学会观察、凑形.

类型Ⅳ：多次使用基本不等式

【例 6】设 $a>2b>0$，则 $\dfrac{a^4+1}{2b(a-2b)}$的最小值是_____.

解析：a，b 之间没给等量关系，只能通过放缩来消元，注意到分母两项相加可消去 b，故先处理分母，

因为 $2b(a-2b)\le(\dfrac{2b+a-2b}{2})^2=\dfrac{a^2}{4}$，所以 $\dfrac{a^4+1}{2b(a-2b)}\ge\dfrac{a^4+1}{\frac{a^2}{4}}=\dfrac{4(a^4+1)}{a^2}=4(a^2+\dfrac{1}{a^2})\ge 4\times 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{1}{a^2}}=8$，

取等条件是 $2b=a-2b$ 且 $a^2=\dfrac{1}{a^2}$，结合 $a>0$ 可得 $a=1$，$b=\dfrac{1}{4}$，满足题意，故 $\dfrac{a^4+1}{2b(a-2b)}$的最小值是 8.

答案：8

【总结】基本不等式可以多次使用（一般每次使用都会减少未知数），只要确保取等条件能同时满足即可.

强化训练

1.（2023·重庆模拟·★★★）已知 $x>0$，$y>0$，$xy+x-2y=4$，则 $2x+y$ 的最小值是（　　）

（A）4　（B）5　（C）7　（D）9

2.（2020·江苏卷·★★★）已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$，则 x^2+y^2的最小值为_____.

3.（★★★）已知 $x>0$，$y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，则 $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{y}{y-4}$的最小值为_____.

4．（★★★）若 $a>0$，$b>0$，且 $ab=2a+b+16$，则 ab 的最小值为_____.

5．（★★）若 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，则 $\dfrac{xy}{2x+y}$ 的最大值为_____.

6．（2023·武汉模拟·★★★）已知 $x>0$，$y>0$，且 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1$，则 $2x+y+\dfrac{2y}{x}$ 的最小值为_____.

6．（2021·天津卷·★★★）已知 $a>0$，$b>0$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}+b$ 的最小值为_____.

8．（★★★）已知 a，b，c 均为正数，且 $abc=4(a+b)$，则 $a+b+c$ 的最小值为_____.

9．（2022 • 全国联考 • ★★★★）若实数 x，y 满足 $4^x+4^y=2(2^x+2^y)$，则 $2^{x-1}+2^{y-1}$ 的值可以是（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）3